双曲系の解のgliding pointの近くにおける特異性の伝播について(代数解析学)

久保田, 幸次

数理解析研究所講究録
533巻 1984年 141-164

双曲系の解の gliding point の近くにおける特異性の伝播について

北大理　久保田幸次（Kōji Kubota）

線型双曲系に対する混合（初期－境界値）問題の解の C^∞ の意味での正則性又は特異性の伝播を考える。より正確に云うと、data の特異性 i.e. WF set（wave front set）が解のそれにどう伝わるかを調べる。先ず、領域の内部ではよく分っていると云ってよい。又、すべての（零）陪特性曲線が境界と横断的に交わるか、接するとしても境界がこれらの曲線に関して強凹（作用素が定係数のときは、強凸曲面の外部領域）な場合も比較的よく分っている。それ故、ここでは、陪特性曲線が境界と強凸に接する（定係数のときは、強凸曲面の内部）場合を考える。gliding point とは、この接点の上の cotangent space における点のことである。この場合はあまりよく分っていない。典形的な例としては、等方性媒質中で弾性体の方程式を自由境界条件の下で考えたとき、gliding point が P－波から起る場合は分っているが、S－波から起る場合は分っていない（外部問題 i.e. diffractive point の

ときは、パラメトリックスが構成されている)。後者における数学的困難さは、主として、①いわゆる一様ロパチンスキー条件が破れている、② S-波は2重になっている(このため、境界上の方程式を、外部問題のときのように、単独方程式に帰着できない)、の2点に起因する。

さて、高階の双曲系は、しばしば1階の対称双曲系として書くことができる。上の例では、応力テンソル(3次の対称行列)の成分6個と、変位ベクトルの時間についての導関数3個を未知関数にとると、1階偏微分作用素の 9×9 対称双曲系になることはよく知られている(e.g. [5], p. 295)。それ故、ここでは、1階対称双曲系を *maximally dissipative* な境界条件の下で考える。(上の例では、更に *energy preserving* となっている)。又、局所的な話なので、半空間:

$$X=\{x=(x_0,x_1,\cdots,x_n)=(x';x_n)\,;\,x_n\geq 0,\ x'\in R^n\}$$

で考える。ここで x_0 は"時間変数"とみなす。

今、$P(x,D)$ を R^{n+1} で定義された C^∞ 係数の1階微分作用素の対称双曲系とする, i.e.,

$$P(x,D)=\sum_{j=0}^{n}A_j(x)D_j+C(x)\ ,\ D_j=-\sqrt{-1}\,\partial/\partial x_j\ ,$$

ここで、A_j, C は $m\times m$ 行列, $A_j^*=A_j$ かつ A_0 は正定値である。"境界行列" $A_n(x)$ は、階数一定とする。(rank $A_n=m$ のとき、X の境界 ∂X は P に関して非特性的、rank A_n

$<m$ のとき、一様特性的と云われる)。この作用素に対して次の混合問題を考える:

$$
(1) \quad \begin{cases} P(x,D)u = 0 & \text{in } X, \\ B(x)u = f & \text{on } \partial X, \\ u \text{ is given} & \text{in } X \cap \{x_0 \ll 0\}. \end{cases}
$$

ここで、A_n の正の固有値の数を d^+ とかくと、B は $d^+ \times m$ 行列で $\operatorname{rank} B = d^+$ かつ C^∞ である。又、斉次境界条件 $Bu = 0$ は P に関して maximally dissipative, i.e., $\forall x \in \partial X$ に対して

(2) $\quad A_n(x) \leqq 0$ (半負定値) $\quad$ on $\ker B(x)$,

かつ $\ker B$ はこの性質をもつ ($\mathbb{C}^m$ の) 極大な部分空間、と仮定する。(更に $A_n(x) = 0$ on $\ker B(x)$ のとき、energy preserving と云われる)。このとき、

(3) $\quad \ker A_n(x) \subset \ker B(x) \quad {}^\forall x \in \partial X$,

かつ (1) は $L^2(X)$ で well posed であることは、よく知られている。(3) の意味は、e.g. $A_n = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, A は d 次の正則行列のとき、$B = (B_1, 0)$, B_1 は $d^+ \times d$ 行列の形であることを意味する。云いかえると、境界条件を"非特性的な成分"にのみ課す。又、解の正則性も、∂X が非特性的のときはよく分っている。e.g. data $\in C^\infty \Longrightarrow$ 解 $\in C^\infty$。しかし、∂X が特性的な場合は殆んど分っていないが、次の形

の regularity property は証明することができる（当面の目的には十分）。Pの係数及びBは $\mathcal{B}^\infty$ に属するとする。このとき、

(4) $u \in H_{1,s}(X_T)\ \exists s \in R^1$, $Pu \in C^\infty(X_T)$, $Bu \in C^\infty(\partial X_T)$ かつ $u \in C^\infty(X)$ for $x_0 << T$
$\Longrightarrow u \in C^\infty(X_T)$。

ここで、$X_T = X \cap \{x_0 < T\}$, $\partial X_T = \partial X \cap \{x_0 < T\}$,
かつ $H_{1,s}(X) \ni u \underset{def.}{\Longleftrightarrow} s = 0, 1, 2, \cdots$ のときは、u の x_n に関する高々1階の，x に関する $1+s$ 階の導関数が $L^2(X)$ に属する。$\forall s \in R^1$ に対しては、$\partial/\partial x'$ を $(1-\Delta_{x'})^{1/2}$ におきかえる。

又、Pの主表象 $P_1(x,\xi)$ について、次の3条件を仮定する：

(5) P_1 は重複度一定，i.e.

$$\det P_1(x,\xi) = Q_1(x,\xi)^{m_1} \cdots Q_r(x,\xi)^{m_r}\, \widetilde{Q}(x,\xi),$$

ここで、$m_1, \cdots, m_r$ は定数，$Q_1, \cdots, Q_r, \widetilde{Q}$ は ξ の斉次多項式で、ξ_0 に関する共通零点をもたない。又、$\widetilde{Q}$ は ξ_n を含まない。更に $Q_1, \cdots, Q_r$ は ξ_0 に関して strictly hyperbolic。

この条件の下で、Xの内部における特異性の伝播はよく知られている。（Hörmander の定理の一般形，e.g. [8]，pp. 154−155）。

(6)　∂X は $Q_1, \cdots, Q_r$ に関して非特性的, i.e., $\xi'=0$ かつ $\xi_n=1$ のとき $Q_j(x,\xi) \neq 0$, $j=1,\cdots,r$, $x \in \partial X$.

<u>記号</u>　$\iota: \partial X \to R^{n+1}$ を injection, $\iota^*: T^*R^{n+1}|_{\partial X} \to T^*\partial X$ を pullback, $Q = Q_1 \cdots Q_r$ とおく。このとき、

(7)　${}^\forall(x',\xi') \in T^*\partial X \setminus 0$ に対して、Q の $\iota^{*-1}(x',\xi')$ における零点は高々二重, かつ二重零点は高々1位。(これは、$Q(x',0,\xi',\xi_n)=0$ の実根 ξ_n についての条件)。

さて、$(\bar{x}',\bar{\xi}') \in T^*\partial X \setminus 0$ を a gliding point とする。即ち、(c.f. [1])、或る j, e.g., $j=1$ に対して、$Q_1(\bar{x},\bar{\xi}',\xi_n)=0$ は二重根 $\bar{\xi}_n$ をもち, かつ Poisson bracket $\{Q_1, \partial Q_1/\partial\xi_n\}(\bar{x},\bar{\xi}) < 0$ とする。ここで $\bar{x}=(\bar{x}',0)$, $\bar{\xi}=(\bar{\xi}',\bar{\xi}_n)$。これは、$(\bar{x},\bar{\xi})$ を通る Q_1 の陪特性曲線が、X の外から ∂X に($\bar{x}$ で)1次の接触をすることを意味する。以下、$\bar{x}'=0$ と仮定して、話を $\iota^{*-1}(\bar{x}',\bar{\xi}')$ の小さい錐近傍 $\subset T^*X \setminus 0$ に制限する。このとき、$(\bar{x},\bar{\xi})$ の或る錐近傍で

$$Q = Q_0 \times (\text{nonzero}), \text{ かつ}$$

(8)　$Q_0(x,\xi) = (\xi_n - \lambda(x,\xi'))^2 - \mu(x,\xi')$

と表わせる。ここで、$\mu(\bar{x},\bar{\xi}')=0$, $\bar{\xi}_n = \lambda(\bar{x},\bar{\xi}')$ かつ

(9)　$\{\xi_n - \lambda, \mu\}(\bar{x},\bar{\xi}) < 0$。

__定義__ $\mu|_{T^*\partial X\setminus 0}$ の（零）陪特性帯は、__*gliding ray*__ 又は、__*limiting bicharacteristic*__ と呼ばれる。(c.f. [1], [2])。（Q は strictly hyperbolic だから $\partial\mu/\partial\xi_0 \neq 0$. 従って x_0 で parametrize される）。

境界条件に関する仮定は、Lopatinski 行列式を使って述べられる。$\partial\mu/\partial\xi_0 \neq 0$ だから、$\partial\mu/\partial\xi_0 > 0$ の場合を考える。$\mu(x',0,\xi') > 0$ のとき、$Q_0(x',0,\xi',\xi_n) = 0$ の ξ_n に関する根は 2 つあるが、この中、$(\partial Q_0/\partial\xi_n)/(\partial Q_0/\partial\xi_0) > 0$ なる方を __outgoing__ root と云い、$\xi_n^+(x',\xi')$ と書く。今は、$\xi_n^+(x',\xi') = \lambda(x',0,\xi') - \sqrt{\mu(x',0,\xi')}$ 。

今、$W_0(x',\xi',\xi_n)$ を、$Q_0(x',0,\xi) = 0$ のとき $\ker P_1(x',0,\xi)$ の基底となるような $m \times m_1$ C^∞ 行列とする。（m_1 は (5) における Q_1 の重複度）。又、$W_h^+(x',\xi')$, $W_e^+(x',\xi')$ をそれぞれ、$(Q/Q_0)(x',0,\xi',\xi_n) = 0$ の outgoing simple real roots $\xi_n(x',\xi')$ 及び $\mathrm{Im}\,\xi_n > 0$ なる根 ξ_n に対する $P_1(x',0,\xi)$ の root subspace の基底とする。そして

$$(10)\qquad R(x',\xi',\xi_n) = \det B(x')\bigl(W_0(x',\xi',\xi_n), W_h^+(x',\xi'), W_e^+(x',\xi')\bigr)$$

とおく。このとき、$R(x',\xi',\xi_n^+(x',\xi'))$ は、(1) の __Lopatinski 行列式__と云われる。又、

$$(11)\qquad R(\bar{x}',\bar{\xi}',\xi_n^+(\bar{x}',\bar{\xi}')) = R(\bar{x}',\bar{\xi}) \neq 0$$

のとき、一様 Lopatinski 条件が $(\bar{x}', \bar{\xi}')$ でみたされると云われる。この条件が破れるとき、次の3条件を仮定する。

(H_1) $(\partial R/\partial \xi_n)(\bar{x}', \bar{\xi}) \neq 0$。

この条件の下で、

$$R_\lambda(x', \xi') = (R/(\partial R/\partial \xi_n))(x', \xi', \lambda(x', 0, \xi'))$$

とおくと、

(H_2) $\mu(x', 0, \xi') = 0$ 上で次のことが成り立つ：

$$\arg R_\lambda(x', \xi') \subset \left[\frac{\pi}{2} + \delta_1, \frac{3}{2}\pi - \delta_1\right]$$

なる定数 $\delta_1 > 0$ が存在し、更に $m_1 \geqq 2$ のとき、

$$R_\lambda(x', \xi') = 0 \quad \text{for } x_0 > -\delta_2$$

なる定数 $\delta_2 > 0$ が存在する。

(H_3) $\mu(x', 0, \xi') = 0$ 上で、

$$R(x', \xi', \lambda(x', 0, \xi')) \neq 0 \quad \text{for } x_0 \ll 0。$$

Remark 上の条件 (H_1) は標準的なものである。(H_2) は、$\sigma = 0$ 又は $\sigma = \delta_1$ だけ回転した後で強形 Gårding の不等式を使うために必要な（多分）技術的な仮定である。又、$m_1 = 2$ のときの制限は、$\mu(x', 0, \xi') > |\xi'|^{2-\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < 1/2$ における解の正則性を出すためにのみ使われる。$\mu(x, \xi')$ は ξ' につき、2次の斉次関数であることに注意。(H_3) は完全に技術的な条件だが、(H_1) と (H_2) のみが成り立っている場合でも、しばしば (H_3) をみたすように修正できる。(c.f. 下の例1, 2)。

結果を述べる為に、記号を用意する。

$$N_0 = \{(x', \xi') \in T^*\partial X \setminus 0 \ ; \ \mu(x', 0, \xi') = 0\},$$

$$N_\pm = \{(x', \xi') \in T^*\partial X \setminus 0 \ ; \ \mu(x', 0, \xi') \gtrless 0\}$$

とおく。$M(f)$ を、$WF(f) \cap N_0$ から出発し x_0 の正の向きに進む *gliding rays* の *union* とする。Φ_+ を、N_+ 上の正準変換で次の性質をもつものとする；$\iota^{*-1}(x', \xi')$ から出発する Q_0 の *outgoing* な特性帯が、$\iota^{*-1}(\Phi_+(x', \xi'))$ で再び ∂X とぶつかる。∂X をこえて拡張可能な超関数 $u \in \mathcal{D}'(X \setminus \partial X)$ が <u>*smooth up to* ∂X *at* $(\hat{x}', \hat{\xi}') \in T^*\partial X \setminus 0$</u> とは、$\psi(x', D')u \in C^\infty(X)$ *for* $0 \leqq x_n << 1$ なる $\psi(x', \xi') \in S^0_{1,0}$ が存在し、$\psi(\hat{x}', \hat{\xi}') \neq 0$、なることと定義する (c.f. [17])。

このとき、初期条件 0 の (1) の近似解 (*mod* $C^\infty(X)$) の存在を示すことができる，i.e.，

<u>定理1</u> (1) が破れるとき、$(H_1) \sim (H_3)$ がみたされるとする。$f \in \mathcal{E}'(\partial X)$ かつ $WF(f)$ は $(\bar{x}', \bar{\xi}')$ の十分小さい錐近傍に含まれているものとする。このとき、次の性質をもつ正数 T，実数 s 及び $E(f) \in \mathcal{D}'(X \setminus \partial X)$ が存在する：

$$E(f) \in H_{\infty, s-\infty}(X_T) = \bigcap_{k=1}^{\infty} H_{k, s-k}(X_T),$$

$$P E(f) \in C^\infty(X_T), \quad B E(f) - f \in C^\infty(\partial X_T),$$

$$E(f) \in C^\infty(X) \ \text{for} \ x_0 << 0, \ \text{かつ}$$

$$) \ WF(E(f)|_{\partial X_T}) \subset WF(f) \cup M(f) \cup \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} \Phi_+^k(WF(f) \cap N_+)\right)。$$

更に、$E(f)|_{X_T}$ は、上式の右辺の補集合に属するすべての $(x',\xi')\in T^*\partial X\setminus 0$ で smooth up to ∂X。ここで、Φ_+^k は Φ_+ の k 次の巾。X_T は (4) における記号。

この定理と (4) より直ちに次を得る：

<u>系 1</u>　定理 1 の仮定がみたされているとする。このとき、次の性質をもつ $T>0$ が存在する：$u\in H_{1,s}(X_T)$ ${}^\exists s\in R^1$, $Pu\in C^\infty(X_T)$, $Bu-f\in C^\infty(\partial X_T)$ かつ $u\in C^\infty(X)$ for $x_0<<0$ ならば、$u|_{X_T}$ は、(12) の右辺の補集合のすべての点で smooth up to ∂X。

次に、初期条件 $\neq 0$ の場合を考える。$(\bar{x}',\bar{\xi}')$ を通る gliding ray を $\Gamma(\bar{x}',\bar{\xi}')$ とする。このとき、

<u>定理 2</u>　(11) が破れるとき $(H_1)\sim(H_3)$ が成り立っているとする。このとき、次の性質をもつ 0 の近傍 $V\subset X$ が存在する：$u\in H_{\infty,s-\infty}(V)$ ${}^\exists s\in R^1$, $Pu\in C^\infty(V)$, $(\bar{x}',\bar{\xi}')\notin WF(Bu|_{\partial X})$, $WF(u|_{\partial X})\cap\Gamma(\bar{x}',\bar{\xi}')=\phi$ for $-{}^\exists\delta<x_0<0$, かつ $WF(u|_{x_n>0})$ は、$\iota^{*-1}(\bar{x}',\bar{\xi}')$ を通る Q/Q_0 の incoming な零特性帯のいずれとも交わらなければ、u は $(\bar{x}',\bar{\xi}')$ で smooth up to ∂X。

この定理は、大域的な形で述べると意味が分り易くなる：

<u>系 2</u>　$\Gamma(\bar{x}',\bar{\xi}')$ 上の各点で (11) 又は $(H_1)\sim(H_3)$ が成り立っているとする。更に、$u\in H^{loc}_{\infty,s-\infty}(X)$ ${}^\exists s\in R^1$,

$Pu \in C^\infty(X)$, $WF(Bu|_{\partial X}) \cap \Gamma(\bar{x}', \bar{\xi}') = \phi$, かつ $WF(u|_{x_n>0})$ は $\iota^{*-1}(\Gamma(\bar{x}', \bar{\xi}'))$ を通る Q/Q_0 の incoming な零特性帯のどれとも交わらないものとする。このとき、

$$(\bar{x}', \bar{\xi}') \notin WF(u|_{\partial X}) \Rightarrow \Gamma(\bar{x}', \bar{\xi}') \cap \{x_0 > 0\} \cap WF(u|_{\partial X}) = \phi,$$

$$\in \qquad \Rightarrow \Gamma(\bar{x}', \bar{\xi}') \cap \{x_0 < 0\} \subset WF(u|_{\partial X}).$$

云いかえると、$\Gamma(\bar{x}', \bar{\xi}')$ 上の正則性は、x_0 の正の向きに伝播し、特異性は負の向きに伝播する。

定理2の証明は、次のようにして定理1に帰着される：先ず u を $x_n \leqq 0$ に Seeley 流に拡張し、次に (x, ξ') について $(\bar{x}, \bar{\xi}')$ の近くで cutoff し、最後に free space における Hörmander の定理の一般形を使う。その際、次の事実も使う。

(13) ([1] における <u>Proposition 4.16 の拡張</u>)。$(x', \xi') \in T^* \partial X \setminus 0$ を $\tilde{Q}(x', 0, \xi') \neq 0$ なる点とする。$(x', 0)$ の或る近傍 $U \subset X$ に対して、$u \in H_{\infty, s-\infty}(U)$ $\exists s \in R^1$, $Pu \in C^\infty(U)$, かつ $(x', \xi') \notin WF(u|_{\partial X})$ とする。更に $\iota^{*-1}(x', \xi')$ を通る Q の零特性帯の各々が、少くても1つの向きに直ちに $x_n < 0$ に入るか、又は、少くても1つの向きで $WF(u|_{V \setminus \partial X})$ と交わらないものと仮定する。このとき、u は (x', ξ') で smooth up to ∂X。

<u>Remark</u>　定理2で、WFに関する仮定は、結論のため

に必要である。又、系2で、正則性の伝播の向きは、(4)のそれと一致している。従って、更に $Bu=0$ が energy preserving ならば、(4)は逆向きにも成立し、かつ(H_2),(H_3)がそれに応じた形で成立していれば、系2の結論は、「$WF(u|_{\partial X})$ は $\Gamma(\mathcal{T}', \mathcal{T}')$ 上で invariant」ということになる。

以上の一般論を、弾性体及びMaxwellの方程式に適用してみよう。

例1　等方性媒質中で弾性体の方程式：

(14)　$L(D_t, D_y)w = \partial^2 w/\partial t^2 - (\lambda+\mu)\nabla \operatorname{div} w - \mu \Delta w = F$

を考える。ここで、$w = w(t,y) \in R^3$ は変位ベクトル，$y \in R^3$，λ, μ は Lamé 定数で $\mu > 0$，$3\lambda + 2\mu > 0$。これは2階の3×3対称双曲系である。今、$G \subset R^3$ を C^∞ 境界をもった強凸有界な開集合とする。このとき、glancing point（Lの陪特性曲線が境界に接している）は、gliding point である。又、

(15) $\det L(\tau, \eta) = (\mu|\eta|^2 - \tau^2)^2((\lambda+2\mu)|\eta|^2 - \tau^2)$

である。ここで、τ, η は t, y の covariable。$\nu(y)$ を ∂G の内向単位法線ベクトルとする。簡単のため、$y=0$ の近くで考え、$\nu(0) = (0,0,1)$ と仮定する。又、G は $y_3 + \varphi(y_1, y_2) > 0$ で与えられるものとする。このとき、$\nabla\varphi(0) = 0$，かつ G は強凸だから

(16) $\quad \mathrm{Hess}\, \varphi(0) < 0$ （負定値）。

更に、$x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $x_3 = y_3 + \varphi(y_1, y_2)$ と変数変換すると、G は $x_3 > 0$ でよえられる。一般論では t を x_0 と書いたが、ここでは、$x = (x_1, x_2, x_3) = (x', x_n)$, $x_3 = x_n$ と書き、$X = \{(t, x);\ x_n \geqq 0\}$ とおく。又、x の covariable を ξ とおく。このとき、

(17) $\quad |\eta|^2 = (1 + |\nabla\varphi|^2)\xi_n^2 + 2\xi_n \nabla\varphi\cdot\xi' + |\xi'|^2$

が成り立つ。さて、(14) を1階の系にするには、e.g.

(18) $\quad u = {}^t(p_{11}, p_{22}, p_{33}, p_{23}, p_{31}, p_{12}, \partial w/\partial t)$

とおく。ここで、$p = (p_{ij}(t, y))$ は応力テンソルで、3次の対称行列である。よく知られた関係：

(19) $\quad p_{ij} = \lambda(\mathrm{div}\, w)\delta_{ij} + \mu(\partial w_i/\partial x_j + \partial w_j/\partial x_i)$

を使うと (1) の形になる。ここで、$m = 9$, $d^+ = 3$ である。

又、$\det P_1(t, y, \tau, \eta) = \det L(\tau, \eta)\hat{Q}$, $\hat{Q} = \tau^3$ となる。

$\mu|\eta|^2 - \tau^2$, $(\lambda + 2\mu)|\eta|^2 - \tau^2$ は、それぞれ、S-波, P-波に対応している。$x = 0$ では、(17) より $|\eta|^2 = |\xi|^2$ だから、$(0, 0, \tau, \xi') \in T^*\partial X \setminus 0$ が gliding point とは、$\tau^2 = \mu|\xi'|^2$ 又は $\tau^2 = (\lambda + 2\mu)|\xi'|^2$ を意味する。このとき, $\det L(\tau, \eta) = 0$ 上では、(15), (17) より $\xi_n = 0$ となる。

さて、∂G 上で自由境界条件を課そう, i.e.,

(20) $\quad p(t, y)\nu(y) = 0 \quad \text{on } R^1 \times \partial G$ 。

このとき、 $\nu = {}^t(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ とおくと、(11) における B は

(21) $$B = \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 & 0 & 0 & \nu_3 & \nu_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_2 & 0 & \nu_3 & 0 & \nu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_3 & \nu_2 & \nu_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。今、条件 (11) 又は $(H_1) \sim (H_3)$ がどうなるかをみよう。$(\bar{t}, \bar{x}', \bar{\tau}, \bar{\xi}') \in T^*\partial X \setminus 0$ を gliding point とする。$\bar{x} = 0$ とする。このとき、$\nu_1 = \nu_2 = 0$, $\nu_3 = 1$。又、$\bar{\tau} > 0$ とする。

場合 1　$\bar{\sigma} \equiv (\bar{t}, \bar{x}', \bar{\tau}, \bar{\xi}')$ が P-波から起る場合、i.e. $\bar{\tau} = \sqrt{\lambda + 2\mu}\,|\bar{\xi}'|$ のとき、 $m_1 = 1$, $Q_1 = (\lambda + 2\mu)|\xi|^2 - \tau^2$,

$$R(\bar{t}, \bar{x}', \tau, \xi', \xi_n) = \gamma_1^+ \{ (\tau^2 - 2\mu|\xi'|^2)^2 + 4\mu^2 |\xi'|^2 \gamma_1^+ \xi_n \}$$

となる。(c.f. [5], p.296)。ここで、

$$\gamma_1^+ = -(\tau^2 - \mu|\xi'|^2)^{1/2}/\mu \text{。}$$

$\therefore$ $R(\bar{\sigma}, 0) = -(\lambda + \mu)^{1/2} \lambda^2 |\bar{\xi}'|^5 / \mu < 0$ となり、(11) が成立。

場合 2　$\bar{\sigma}$ が S-波から起る場合, i.e., $\bar{\tau} = \sqrt{\mu}\,|\bar{\xi}'|$ のとき、$Q_1 = \mu|\xi|^2 - \tau^2$, $m_1 = 2$, かつ

$$R(\bar{t}, \bar{x}', \tau, \xi', \xi_n) = \xi_n \{ (\tau^2 - 2\mu|\xi'|^2)^2 + 4\mu^2 |\xi'|^2 \gamma_2^+ \xi_n \},$$

$\gamma_2^+ = i(|\xi'|^2 - \tau^2/(\lambda + 2\mu))^{1/2}$ となる。$\therefore$ $R(\bar{\sigma}, 0) = 0$ で (11) は破れる。又、$(\partial R/\partial \xi_n)(\bar{\sigma}, 0) = (\mu|\bar{\xi}'|^2)^2 \neq 0$, i.e. (H_1) は成立。同様の計算で、$\mu|\xi'|^2 = \tau^2$ のとき $R = 0$ $\forall t' \in R^1$ が得られる。即ち, (H_2) は成立するが、(H_3) は破

れる。

さて、定理2の仮定は、$B(t,x)$ の $t<0$ の値には無関係であることに注意し、定理1で、$WF(f)\subset\{t>-\delta\}\ \exists\delta>0$ とすると、$t<-\delta$ で境界条件を修正した問題に対してこれらを証明すればよいことが分る。それ故、台が $t<-\delta$ に含れている cutoff 関数 $\chi(t)$ をとり、(20) を

(20)′ $$p(t,y)v(y)-\chi(t)(\partial w/\partial t)(t,y)=0$$

と修正する。このとき、(H_1) は成立するから、(H_2) をそこなわずに (H_3) が成立していることを云えばよい。(20)′ の下では、(21) は、右側の 3×3 block のみ変り、主対角線上に $-\chi(t)$ が並ぶ。従って、少し計算を要するが、$\tau=\sqrt{\mu}|\xi'|$ のとき、

$$(R/(\partial R/\partial\xi_n))(t,\bar{x}',\tau,\xi',0)=-\tau\chi(t)R_1,$$

$$R_1(t,\bar{x}',\bar{\tau},\bar{\xi}',0)=1/\mu+O(\chi(t))+o(1)$$

が得られる。結局、$0<\chi(t)<<1$ とすれば、$R\neq0$ かつ $\arg R/(\partial R/\partial\xi_n)\fallingdotseq-\pi$ となり、(H_2) をそこなわずに (H_3) が成り立つことが分る。

さて、このように修正したBに対して定理1が成り立つが、(12) の右辺は $\{t<-\delta\}$ とは交わらない。従って、本来のBに対しても定理1,2が成立することが分る。以上のことから例えば次のようなことが分る。「Γ_0 を、$(t,y,\tau,\eta)=(0,0,\sqrt{\mu}|\eta|,\eta)\in T^*(R^1\times\partial G)\setminus0$ を通る gliding ray とする。このとき、

<u>定理3</u> $w \in \mathcal{D}'(R^1 \times G)$ を、$R^1 \times \partial G$ を超えて拡張可能な超関数で、$Lw \in C^\infty(R^1 \times \overline{G})$ かつ $WF(p\nu|_{R^1 \times \partial G}) \cap \Gamma_0 = \phi$ をみたすものとする。このとき、Γ_0 は、

$$WF(w|_{R^1 \times \partial G}) \cup WF(\partial w/\partial \nu|_{R^1 \times \partial G})$$

と交わらないか、又は、完全にこれに含まれる。

これを証明するには、$R^1 \times \partial G$ が L に関して非特性的だから、$w \in \mathcal{D}'(R^1 \times G)$ が拡張可能かつ $Lw \in C^\infty(R^1 \times \overline{G})$ ならば、局所的に $w \in H_{\infty, s-\infty}(R^1 \times G)$ $\exists s \in R^1$ であり、又、$\partial/\partial t$ は Γ_0 上で elliptic だから、(13) により、

$$WF(w|_{R^1 \times \partial G}) \cup WF(\partial w/\partial \nu|_{R^1 \times \partial G}) = WF(\partial w/\partial t|_{R^1 \times \partial G})$$

が成立することに注意して、(18) とおきかえて定理2を使えばよい。

<u>Remark</u> 他の境界条件、e.g. ① rigid : $w = 0$ のときは (11) が成立。② $\nu \cdot (\partial w/\partial t) = 0$ かつ $\nu \times (p\nu) = 0$, 又は ③ $\nu \times (\partial w/\partial t) = 0$ かつ $\nu \cdot (p\nu) = 0$ に対しては、(11) が破れる場合、$\partial w/\partial t$ を $\partial w/\partial t - \chi(t) p\nu$, $p\nu$ を $p\nu - \chi(t)(\partial w/\partial t)$ とおきかえれば同様に扱える。②, ③ で (H_2) が成り立つ場合は、$R_\lambda = 0$ となるが、より一般な例としては、② を次のように一般化する : $b(t, y) \in R^3$ を $\nu \cdot b \neq 0$ なる単位ベクトルとして、②′ $b \cdot (\partial w/\partial t) = 0$ かつ $b \times (p\nu) = 0$ を考える。このとき、$\mu(x', 0, \xi') = 0$

上で $R_\lambda(x',\xi') \leqq 0$ となるが、上と同じおきかえで (H_1) ～ (H_3) が成立する。

例2 Maxwell 方程式

$$P(D_t, D_y)\begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{curl} \\ \mathrm{curl} & 0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} = 0$$

を考える。領域は例1と同じ。ここで、E, H はそれぞれ電場，磁場ベクトル。これは 6×6 対称双曲系で

$$\det P(\tau,\eta) = (|\eta|^2 - \tau^2)^2\tau^2$$

となる。今、領域Gを完全導体とすると、境界条件は $\nu \times E = 0$ となる。このとき、(H_2) は $R_\lambda = 0$ で成立する。又、(20)′ に対応する修正は、$\nu \times E + \chi(t)(H - (\nu \cdot H)\nu) = 0$ とすればよい。$m_1 = 2$ に注意。

Remark 以上の結果は、部分的には知られていた。定理1は、一様 Lopatinski 条件 (11) の下で、単独方程式に対して [2] で、我々と同じ系に対しては [7] で得られている。定理2は、単独2階の方程式に対しては、[1] で (11) を仮定して、[6] で (H_2) より少し弱い条件の下で、又、系に対しては、[4] で例2の場合、[3] で例1の場合1のとき、それぞれ証明されている。

最後に、定理1の証明の方針を少し述べよう。[5] では、$(\bar{x}',\bar{\xi}')$ が diffractive point の場合 i.e. (9) の符号が反対のときを扱ったが、これを、Eskin [2] に従って修正する。

[2] では、(11) が仮定されていたから、これが破れたときどうするかが最大の課題となる。[5] と同様に、$E(f)$ を次の形でさがす：

(22) $$E(f) = G_0 v_0 + G_h v_h + G_e v_e,$$

ここで、v_0, v_h 及び v_e は、$\mathcal{E}'(R^n)$ の元を成分にもつベクトルで、v_0 の長さは、(5) における Q_1 の重複度 m_1 に等しい。G_h は、$(Q/Q_0)(x, \xi', \xi_n) = 0$ の実単根 ξ_n に対応するフーリエ積分作用素（の行列），G_e は $\mathrm{Im}\, \xi_n > 0$ なる根に対応する擬微分作用素である。これらの構成はよく知られている（e.g. [8], Chap. IX）。G_0 は、Q_0 に対応する Fourier-Airy 積分作用素の $m \times m_1$ 行列で、[5] のそれとは異る。これを記述するためには、よく知られた相関数 $\theta(x, \eta')$, $\rho(x, \eta')$ と、[2] と同じ Airy 関数 A_0, $A_\pm$ を使う。

先ず、$\theta(x, \eta')$, $\rho(x, \eta')$ は、$(\bar{x}, \bar{\eta}')$ の $X \times (R^n \setminus 0)$ における錐近傍で定義された、C^∞, η' につきそれぞれ 1 次, 2/3 次の実数値斉次関数で、$\rho > 0$ のとき $Q_0(x, \nabla_x(\theta \pm \frac{2}{3}\rho^{2/3})) = 0$, $\eta_0 < 0$ のとき $Q_0(x, \nabla_x(\theta \pm \frac{2}{3}\rho^{2/3})) = O(x_n^\infty)$ as $x_n \to 0$ をみたす。ここで、$\bar{\eta}_0 = 0$, $\bar{\eta}'' = \bar{\xi}''$, $\eta' = (\eta_0, \eta'')$, $\xi' = (\xi_0, \xi'')$。更に、$x_n = 0$ 上で、$\det \partial^2\theta/\partial x' \partial \eta' > 0$, $\partial^2\theta/\partial x_0 \partial \eta_0 > 0$, $\partial \rho/\partial x_n < 0$, かつ $\rho = \alpha |\eta'|^{2/3}$ をみたす。ここで、$\alpha = \eta_0/|\eta'|$。(c.f.

e.g. [2], [8]。最後の性質は、最近、Farris, Comm. in P.D.E. 6 (1981), pp. 651–687, 及び Taylor, Singularities in Boundary Value problems, D. Reidel Publ. Company, 1981 の pp. 271–316 で与えられた。 $(\bar{x}', \bar{\xi}')$ が diffractive point のときは、(9) に応じて、$\partial P/\partial x_n > 0$ となる)。これらより、次のことも分る： $x_n = 0$ 上で、

(23) $\quad \partial\theta/\partial x_n = \lambda(x, \partial\theta/\partial x')$,

(24) $\quad \mu(x, \partial\theta/\partial x') = \alpha(\partial P/\partial x_n)^2 \quad$ for $|\eta'| = 1$。

次に、$A_i(z)$ を第1種の Airy 関数とする。ここではよく知られた次の性質のみを使う： $A_i''(z) - zA_i(z) = 0$ をみたす。$A_i(z)$ は整関数で、負の実軸上にのみ零点をもち、z が実数のとき $A_i(z)$ も実数, $A_i(0) > 0$, $A_i'(0) < 0$, $A_i(z) + \omega A_i(\omega z) + \omega^2 A_i(\omega^2 z) = 0$, ここで、$\omega = e^{i(2/3)\pi}$。更に、次の漸近展開をもつ：

$$A_i(z) = z^{-1/4} e^{-(2/3)z^{3/2}} \Phi(z),$$

$$\Phi(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-(3/2)k} \quad \text{for } |z| \gg 1, \ -\pi < \arg z < \pi.$$

ここで、a_k は実, $a_0 = (2\sqrt{\pi})^{-1}$。又、A_0, $A_\pm$ を次のように定義する：($A_\pm$ は diffractive なとき現われる。e.g. [8] のそれと同じもの)

$$A_\pm(z) = e^{\mp i\pi/3} A_i(e^{\mp i\pi/3} z), \quad A_0(z) = A_+(z) + A_-(z).$$

このとき、$A_0(z) = A_i(-z)$, $\overline{A_-(z)} = A_+(\bar{z})$。更に、

$A_\pm''(z) + zA_\pm(z) = 0$, $A_0''(z) + zA_0(z) = 0$,

$$A_\pm(z) = z^{-1/4} e^{\pm i(2/3)z^{3/2}} \Phi_\pm(z),$$

$$\Phi_\pm(z) \sim e^{\mp i\pi/4} \sum_{k=0}^{\infty} (\pm i)^k a_k z^{-(3/2)k} \quad \text{for } |z|>>1,$$

$-\pi \pm \pi/3 < \arg z < \pi \pm \pi/3$ が成り立つ。

さて、ϕ_1 を、$y' = \theta_{\eta'}(x', 0, \eta')$, $\xi' = \theta_{x'}(x', 0, \eta')$, $\phi_1(y', \eta') = (x', \xi')$ で与えられる、$T^*R^n_{y'} \setminus 0$ から $T^*\partial X \setminus 0$ への正準変換とすると ($\theta_{x'} = \partial\theta/\partial x'$, $\theta_{\eta'} = \partial\theta/\partial\eta'$)、$\phi_1^{-1}$ の下で、N_+ は $\alpha > 0$ に、$\Gamma(\bar{x}', \bar{\xi}')$ は、$(\bar{y}', \bar{\eta}') = \phi_1^{-1}(\bar{x}', \bar{\xi}')$ を通り y_0 軸に平行な直線に移る。このことを頭において、G_0 を次の形でさがす：

(25) $\quad G_0 v_0 = G_1 g_1 v_0 + G_2 g_2 v_0$

とおく。ここで、$g_1(y_0)$, $g_2(y_0)$ は $g_1 + g_2 = 1$ なる cutoff 関数で、(11) がみたされているときは、$g_1 = 0$, $g_2 = 1$ とする。以下、(11) が破れている場合を考える。このとき、(H_3) が、$(x', \xi') \in \phi_1(\mathrm{supp}\, g_2)$ なる x_0 について成り立つように g_2 を選ぶ。又、$j = 1, 2$ に対して、

$$(G_j w_0)(x) = \int e^{i\check{\theta}} (A_0(\check{p})\check{a}_j - iA_0'(\check{p})\check{b}_j) \times$$
$$\times (A_+(\zeta)^{-1} x_1 + A_0(\zeta)^{-1}(1 - x_1)) \hat{w}_0(\eta') d\eta'$$

と形にとる。ここで、$\hat{w}_0$ は w_0 の Fourier 変換, $\zeta = (y_0 - i\tau)|\eta'|^{-1/3}$, τ は $\tau >> 1$ なる定数, $\check{p}(x, \eta')$ は、$\check{p}(x', 0, \eta') = \zeta$ for $|\eta'| >> 1$ となる、$p(x, \eta')$ の α についての almost analytic continuation (c.f. [2], p.28),

$\check{\theta}$, $\check{a}_j$, $\check{b}_j$ についても同様, $a_j(x,\xi') \in S^0_{1,0}$, $b_j(x,\xi') \in S^{-1/3}_{1,0}$。又, $\chi_1(\xi') \in S^0_{1/3,0}$ は、

$$(26) \qquad A_0(\zeta_0|\xi'|^{-1/3}) = A_0(\alpha|\xi'|^{2/3}) \neq 0 \quad \text{on supp } 1-\chi_1$$

となる cutoff 関数である。a_j, b_j は、$P(x,D)G_j g_j v_0 \in C^\infty(X)$ となるように、transport equation を解いて選ぶ。

さて、G_j は、Eskin [2] の "parametrix" と類似のものであるが、本質的な差は、χ_1 の選び方である。以下、このことについてのべる。$BE(f)|_{\partial X} = f$ を解くために、G_j の ∂X 上の値を考える。$(x',0) \in \partial X$ を x' とかく。$\check{\theta}(x',\xi') = \theta(x',\xi') \mod S^0_{1,0}$, $\check{\rho}(x',\xi') = \zeta$ for $|\xi'| >> 1$ に注意すると、$G_j|_{\partial X}$ は、正準変換として Φ_1 をもち、振巾として $S_{1,0}$ class の表象をもつ Fourier積分作用素と、$1 + L\chi_1$ 又は K の合成であることが分る。ここで、

$$L(\xi') = (A_-/A_+)(\zeta), \quad K(\xi') = (A_0'/A_+)(\zeta)\chi_1 + (A_0'/A_0)(\zeta)(1-\chi_1)。$$

ここで、

$$K_\pm(\xi') = (A_\pm'/A_\pm)(\zeta), \quad K_0(\xi') = (A_0'/A_0)(\zeta)$$

とおくと、$K = (K_+ + K_- L)\chi_1 + K_0(1-\chi_1)$ とかける。K_-, $K_+\chi_1$ は、diffractive な場合に応わる、$S^{1/3}_{1/3,0}$ の表象である。又、(26) により $K_0(1-\chi_1) \in S^{1/3}_{1/3,0}$ である。今、$A_0(z)$ が $z \leq 0$ に零点をもたないことに注意して、

$$A_0(t) > 0 \quad \text{for } t < 3t_0$$

なる正の数 t_0 と、$\chi(t) \in C^\infty(R^1)$, $\chi(t) = 1$ for $t > 2$, $\chi(t) = 0$ for $t < 1$ かつ $\chi'(t) \geq 0$ なる χ を1つとり、$\chi_1(\eta') = \chi(\eta_0 |\eta'|^{-1/3}/t_0)$, $\chi_\varepsilon(\eta') = \chi(\eta_0 |\eta'|^{\varepsilon-1})$, $0 < \varepsilon < 1/2$ とおくと、$\chi_1 \in S^0_{1/3,0}$ は (26) をみたす。Eskin [2] では、χ_1 の代りに χ_ε が使われている。このとき、$K_0(1-\chi_\varepsilon) \in S^{2/3}_{0,0}$ となり、pseudolocal な性質をもたない。但し、(11) が成り立つときは、これの係数を $O(\alpha^\infty)$ となるように、arrange できるので問題は起きないが、(11) が破れると深刻である。

さて、$BE(f)|_{\partial X} = f$ に、Φ_1^{-1} を正準変換とする適当な elliptic Fourier 積分作用素を施すと、y'-空間の方程式が得られるが、条件 (H_1) を使うと、v_h, v_e を消去することができ、

(27) $\quad \mathcal{B}_0 v_0 = f_0$

の形に帰着できる。ここで、$\mathcal{B}_0$ は $m_1 \times m_1$ 行列で、

$$\mathcal{B}_0 = a(1+L\chi_1)\delta_1 + bK\delta_1 + c(1+L\chi_1)\delta_2 + dK\delta_2$$

の形をしている。ここで、$a, c \in S^0_{1,0}$, $b, d \in S^{-1/3}_{1,0}$。又、$WF(f_0)$ は、$(\bar{y}', \bar{\eta}')$ の小さい錐近傍に含まれている。χ_ε を χ_1 におきかえたために、(27) の解 v_0 が $y_0 << \bar{y}_0$ で C^∞ をいうのがめんどうになるが、(H_3) を使うと、supp δ_2 で c は elliptic, $d = O(\alpha)$ がいえるので $v_0 \in H^\infty$ for $y_0 << \bar{y}_0$ が得られる。(25) の右辺第2項

は、このためにのみ必要である。又、a_j, b_j に関する transport eq. の初期値（$\rho=0$ 上での）を [5] と同じにとることにより、a_{11} を a の (1,1) 成分として、

$$a(y',\eta') = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & I_{m_1-1} \end{pmatrix} \quad \text{for } \alpha=0, \ \mathrm{mod}\ S^{-1}_{1,0}$$

とすることができ、条件 (H_2) の前半より

(28) $$\arg a_{11} \subset [-\pi/2, (\pi-\delta_1)/2] \quad \text{for } \alpha=0$$

が従う。但し、このとき、$b_{11}\equiv 1$ と normalize しておく。今、$\gamma=(\alpha^2+|\eta'|^{-4/3})^{1/4}\in S^0_{1/3,0}$ を導入すると、(27) についての基本的な a priori 評価：$\exists C_1>0, \exists \tau_1>0$;

(29) $$\mathrm{Re}\,(B_0 v_0, S_0 v_0) \geqq C_1\tau^{1/2}\|\gamma v_0\|^2 - O(\|v_0\|^2_{-1/2})$$

for $\tau\geqq\tau_1$, $v_0\in L^2(R^n)$ with $\mathrm{supp}\,\hat{v}_0(\eta')\subset\{\gamma\ll\tau^{-1}\}$

が得られる。これは主として (28) による。ここで、S_0 は B_0 と似た形の 0 次の作用素である。又、C_1, τ_1 は τ に無関係な正の定数。γ は、$\alpha=0$ に近づくほど悪くなり、$|\alpha|<|\eta'|^{-2/3}$ では、$\gamma\sim|\eta'|^{-1/3}$ となっている。$H^s(R^n)$ に直すと、

(30) $$\|v_0\|^2_{s-1/3} \leqq C_1'\tau^{-1}\|B_0 v_0\|^2_{s+1/3} + O(\|v_0\|^2_{s-2/3})$$

となり、B_0 の order は 0 だから、2/3 の derivative の loss がある。ちなみに、(11) が成りたつときは、(29) で、$S_0=$ identity として、γ が $\gamma^{1/2}$ となる。従って (30) は、

(30)' $$\|v_0\|^2_{s-1/6} \leqq C_1'\tau^{-1}\|B_0 v_0\|^2_{s+1/6} + O(\|v_0\|^2_{s-5/6})$$

となる。(27)の解の存在及び $(1-\chi_\varepsilon)v_0$ の *regularity* の伝播は、(29)と(30)で間に合うが、$\chi_\varepsilon v_0$ のそれは、より精密な評価を必要とする。初めに云っておくべきだったが、作用素Lは

$$L\chi_1 = L\chi_\varepsilon + L(1-\chi_\varepsilon)\chi_1$$

と分けて扱う必要がある。$L(1-\chi_\varepsilon)\chi_1 \in S^0_{\varepsilon/2,0}$ だが、$L\chi_\varepsilon$ は C^1 級の相関数

$$\varphi(y',\eta') = y'\eta' - \frac{4}{3}\alpha^{3/2}|\eta'|$$

をもち、振巾は、*elliptic* かつ $S^0_{1-\varepsilon,0}$ に属する Fourier 積分作用素として扱わなければならない。今、正準変換 Φ_2 を、

$$\Phi_2^{-1}(y',\eta') = (\varphi_{\eta'}(y',\eta'), \eta')$$

で定義すると、$\chi_\varepsilon v_0$ の正則性を出すには、$p(y',\eta') \in S^0_{1,0}$ を $0 \leqq p \leqq 1$ かつ $p \circ \Phi_2(y',\eta') \leqq p(y',\eta')$ にとり、(29)で v_0 を $\chi_\varepsilon p v_0$ でおきかえた *type* の評価が必要になる。これを出すために、$m_1 \geqq 2$ のときは、(H_2) の後半を使う。

Remark *diffractive* のときは、(27)の B_0 は、$B_0 = a + bK_-$, $K_- \in S^{1/3}_{1/3,0}$, $K_- = O(\gamma|\eta'|^{1/3})$ なので、a の形を使って、(27)を、v_0の第1成分のみの方程式に帰着できた。しかし、今は、$(1+L\chi_1)^{-1}(1-\chi_\varepsilon) \in S^{1/3}_{0,0}$ となり、このような *reduction* は難しいように思われる。終。

References

[1] Andersson, K. G. and Melrose, R. B., The propagation of singularities along gliding rays, Invent. Math. 41 (1977), 197-232.

[2] Eskin, G., Parametrix and propagation of singularities for the interior mixed hyperbolic problem, J. d'Analyse Math. 32 (1977), 17-62.

[3] Guillot, J. C. and Ralston, J., Les ondes latérales comme phénomènes de propagation de singularités, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 292 (1981), Sér. I, 43-46.

[4] Ivrii, V. Ya., Wave fronts of solutions of boundary-value problems for symmetric hyperbolic systems II. Systems with characteristics of constant multiplicity, Sib. Math. J. 20 (1980), 722-734.

[5] Kubota, K., Microlocal parametrices for mixed problems for symmetric hyperbolic systems with diffractive boundary, Hokkaido Math. J. 10 (1981), 264-298.

[6] Melrose,R. B. and Sjöstrand,J., Singularities of boundary value problems. I, II, Comm. Pure Appl. Math. 31 (1978), 593-617, 35 (1982), 129-168.

[7] Petkov, V., Propagation des singularités sur le bord pour des systèmes hyperboliques à charactériques de multiplicité constante, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 293 (1981), Sér. I, 637-639.

[8] Taylor, M. E., Pseudodifferential Operators, Princeton Univ. Press, 1981.